

Capítulo I

Estratégias para resolver problemas

Aprender Física envolve (tentar) resolver uma grande quantidade de problemas. Quer você esteja fazendo pesquisa de fronteira ou lendo um livro sobre um assunto bem conhecido, você precisará resolver alguns problemas. No último caso, é seguro dizer que o verdadeiro teste para descobrir se entendemos uma coisa é a habilidade de resolver problemas sobre o assunto. Ler sobre algum tema quase sempre é um passo necessário no processo de aprendizagem, mas não é suficiente. O passo mais importante é levar o maior tempo possível resolvendo problemas (o que é inevitavelmente uma tarefa de engajamento ativo) além do tempo que você leva lendo (que é geralmente uma tarefa mais passiva).

O assunto deste capítulo é apresentar estratégias gerais para resolver problemas. São coisas que você deve ter sempre em mente quando ataca um problema. Claro, elas não são suficientes por si só, em geral; você não vai longe se não entender os conceitos físicos subjacentes ao assunto em questão. Mas quando você adiciona estas estratégias ao seu entendimento físico, elas podem tornar sua vida muito mais fácil.

I.1 Estratégias Gerais

Há algumas estratégias gerais que você deve usar sem hesitação ao resolver um problema. São elas:

1. **Desenhar um diagrama, se apropriado.**

No diagrama, tenha certeza de indicar claramente todas as grandezas relevantes

(forças, tamanhos, massas, etc.). Diagramas são absolutamente críticos em certos tipos de problemas. Por exemplo, em problemas envolvendo diagramas de “corpo livre” ou cinemática relativística, desenhar um diagrama pode transformar um problema bem complicado em um quase trivial. E mesmo em casos em que diagramas não são tão cruciais, eles são de grande ajuda. Uma imagem definitivamente vale mais que mil palavras (e até algumas mais, se você indicar as grandezas!).

2. **Escreva o que você sabe, e o que você está tentando achar.**

Em um problema simples, você pode fazer isso em sua cabeça sem perceber. Mas em problemas mais difíceis, é muito útil escrever explicitamente. Por exemplo, se há três grandezas desconhecidas que você está tentando determinar, mas você escreveu apenas dois fatos, isto indica que deve haver outro fato que você está deixando de lado (supondo que o problema é de fato solúvel), e você deve então procurá-lo. Pode ser uma lei de conservação, ou uma equação $F = ma$, etc.

3. **Resolva simbolicamente.**

Se você está tentando resolver um problema onde as grandezas dadas são especificadas numericamente, você deve imediatamente trocar os números por letras e resolver o problema em termos de letras. Depois de obter uma resposta em termos das letras, você pode colocar os valores numéricos para obter uma resposta numérica. Há muitas vantagens em usar letras:

- É MAIS RÁPIDO. É muito mais fácil multiplicar um g por um l escrevendo-os no papel próximos um do outro, do que multiplicá-los em uma calculadora. E com esta última estratégia, você ainda teria que pegar a calculadora mais algumas vezes durante a resolução do problema.
- É MAIS DIFÍCIL DE SE COMETER UM ERRO. É muito fácil trocar um 8 por um 9 em uma calculadora, mas você provavelmente não vai trocar um q por um g em um pedaço de papel. Mas se fizer, vai rapidamente notar que deveria ser um g . Certamente você não vai desistir do problema e declará-lo insolúvel

porque não foi dado o valor de q !

- VOCÊ PODE RESOLVER O PROBLEMA DE UMA VEZ POR TODAS. Se alguém vem e diz, “oops, o valor de l é na verdade $2.4m$ ao invés de $2.3m$ ”, você não precisará resolver o problema todo novamente. Você pode simplesmente colocar o novo valor de l na sua resposta simbólica final.
- VOCÊ PODE VER A DEPENDÊNCIA GERAL DE SUA RESPOSTA COM AS VÁRIAS GRANDEZAS DADAS. Por exemplo, você pode ver que ela cresce com grandezas a e b , decresce com c , e não depende de d . Há muito, muito mais informação contida em uma resposta simbólica do que em uma numérica. Além disso, respostas simbólicas são quase sempre simples e elegantes.
- VOCÊ PODE VERIFICAR UNIDADES E CASOS ESPECIAIS. Essas verificações vão juntas com a vantagem anterior da “dependência geral”. Mas elas são tão importantes, que vamos discutí-las em seções futuras.

Tendo dito tudo isso, deve ser notado que há casos ocasionais em que as coisas se tornam complicadas quando trabalhamos com letras. Por exemplo, resolver um problema de três equações e três incógnitas pode ser incômodo, a não ser que você coloque os valores numéricos. Mas na grande maioria dos problemas, é altamente vantajoso trabalhar apenas com letras.

4. Considere unidades/dimensões.

Isso é extremamente importante. Falaremos sobre isso na seção I.2.

5. Verifique limites/casos especiais.

Isso também é extremamente importante. Falaremos sobre isso na seção I.4.

6. Verifique ordem de grandeza se você terminar com um valor numérico.

Se você terminar com uma resposta numérica para o problema, não esqueça de

fazer o teste de sanidade para ver se o número é razoável. Se você calculou a distância que um carro percorre antes de parar, e se você obteve uma resposta de quilômetros ou milímetros, então você sabe que provavelmente fez alguma coisa errada. Erros desse tipo normalmente vêm do esquecimento de potências de 10 (talvez na conversão de quilômetros para metros) ou de multiplicar alguma coisa, ao invés de dividir (apesar de você poder verificar isso através das unidades também).

Você inevitavelmente encontrará problemas, físicos ou não, onde você não obterá uma resposta rigorosa, seja porque as contas são muito complicadas ou porque você não as queira fazer. Mas nesses casos ainda é possível dar um palpite aceitável, em termos da potência de 10 mais próxima. Por exemplo, se você passa por um prédio e imagina quantos tijolos ele possui, ou qual o custo da mão-de-obra para construí-lo, você provavelmente poderá dar uma resposta razoável sem fazer grandes cálculos computacionais. O físico Enrico Fermi era conhecido por sua habilidade em estimar grandezas rapidamente e obter palpites de ordem de grandeza com poucas contas. Por isso, um problema no qual o objetivo é apenas obter uma estimativa da potência de 10 mais próxima é conhecido como um “problema de Fermi”. Claro que, algumas vezes na vida, você precisa saber as coisas com precisão melhor do que a potência de 10 mais próxima.

I.2 Unidades, análise dimensional

As unidades (ou dimensões) de uma grandeza física são as potências de massa, comprimento e tempo associadas a ela. Por exemplo, a unidade de velocidade é comprimento dividido por tempo - comprimento elevado a primeira potência vezes tempo elevado a -1 . A análise das unidades oferece dois benefícios. Em primeiro lugar, se você prestar atenção às unidades, é, em geral, possível dizer como deve ser o jeitão do resultado, exceto por eventuais fatores numéricos (e portanto adimensionais) multiplicativos. Em segundo, checar as unidades no final do cálculo (que é algo que você deve fazer *sempre*) pode lhe dizer se sua resposta tem chance de estar correta. Isso não vai lhe assegurar que sua resposta esteja correta, mas pode assegurar que sua resposta esteja incorreta. Por exemplo, se o objetivo do problema é encontrar um comprimento, e você termina com uma massa,

então você sabe que deve rever suas contas.

Na prática, o segundo dos benefícios é o que você mais deve buscar. Mas vamos fazer alguns exemplos relacionados também ao primeiro, porque esses podem ser um pouco mais estimulantes. Para resolver os três exemplos abaixo exatamente seria necessário utilizar resultados que obteremos mais a frente. Mas vamos apenas ver até onde conseguimos chegar utilizando apenas a análise dimensional. Vamos utilizar a notação “[]” para unidades e considerar que M é dimensão de massa, L de comprimento (do inglês *length*), e T de tempo. Por exemplo, vamos escrever uma velocidade como $[v] = L/T$ e a constante gravitacional como $[G] = L^3/(MT^2)$ (você pode ver isso notando que Gm_1m_2/r^2 tem dimensão de força, que por outro lado tem dimensão ML/T^2 , de $F = ma$). Alternativamente, você pode usar as unidades do S.I. kg , m , e s ao invés de M , L e T , respectivamente. (Ao checar unidades no final dos cálculos, você invariavelmente irá trabalhar mais com a notação do S.I.)

Exemplo 1 - Pêndulo

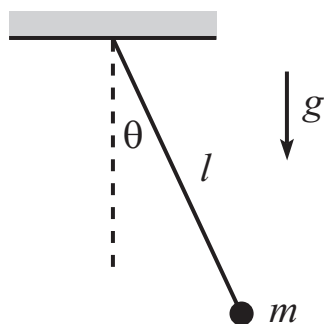


Figura I.1: Pêndulo simples.

Uma massa m é pendurada em uma corda de massa desprezível e comprimento l e balança no plano do papel (veja Fig. I.1). A aceleração da gravidade local é g . O que podemos dizer sobre a frequência das oscilações?

Solução: As únicas grandezas com dimensão dadas no problema são $[m] = M$, $[l] = L$, e $[g] = L/T^2$. Mas há outra grandeza: o ângulo máximo θ_0 , que é adimensional (e fácil de esquecer). Nosso objetivo é encontrar a frequência, que possui unidades de $1/T$. A única combinação de nossas grandezas com dimensão que possui unidades de $1/T$ é $\sqrt{g/l}$. Mas não podemos desprezar a dependência em θ_0 . Então a forma mais geral possível da frequência

é $f = \sqrt{g/l} \cdot F(\theta_0)$, onde F é uma função adimensional. Como θ_0 é adimensional, a função F não tem unidades. Portanto, a frequência tem unidades de $1/T$.

é ¹:

$$\omega = f(\theta_0) \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (\text{I.1})$$

onde f é uma função adimensional da variável adimensional θ_0 .

OBSERVAÇÕES:

1. Acontece que para pequenas oscilações, a função $f(\theta_0)$ é essencialmente igual a 1, de forma que a frequência é essencialmente igual a $\sqrt{g/l}$. Mas não há como mostrar isso apenas utilizando análise dimensional; você deve resolver o problema. Para valores maiores de θ_0 , os termos de ordem superior na expansão de f se tornam importantes. É possível mostrar que a função f até segunda ordem em θ_0 é da forma $f(\theta_0) = 1 - \theta_0^2/16 + \dots$.
2. Como só há uma massa no problema, a frequência (com unidades de $1/T$) não pode depender de $[m] = M$. Se dependesse, não haveria nenhuma outra grandeza para cancelar a unidade de massa e produzir a unidade de inverso de tempo.
3. Dissemos que a única combinação das grandezas dadas que possui unidades de $1/T$ é $\sqrt{g/l}$. Isso é fácil de ver neste caso, mas em outros mais complicados onde a combinação não é tão óbvia, o método a seguir sempre funciona: escreva um produto geral das grandezas dadas elevadas a potências arbitrárias ($m^a l^b g^c$ neste problema), e então escreva as unidades desse produto em termos de a , b e c . Se queremos obter unidades de $1/T$, então precisamos que

$$M^a L^b \left(\frac{L}{T^2} \right)^c = \frac{1}{T}. \quad (\text{I.2})$$

Combinando as potências dos três tipos de unidades em cada lado da equação nos dá

$$M : a = 0, \quad L : b + c = 0, \quad T : -2c = -1. \quad (\text{I.3})$$

A solução para este sistema de equações é $a = 0$, $b = -1/2$, e $c = 1/2$, e reproduzimos o resultado $\sqrt{g/l}$.

¹Vamos calcular a frequência em radianos por segundo, denotada por ω . Então, na verdade estamos falando de “frequência angular”. Basta dividir por 2π (que não afeta as unidades) para obter a frequência “normal”, em ciclos por segundo (hertz), usualmente denotada por ν .

O que podemos dizer sobre a energia total do pêndulo (com a energia potencial sendo medida relativa ao ponto mais baixo)? Vamos estudar energia mais à frente no curso, mas a única coisa que precisamos saber aqui é que energia tem unidades de ML^2/T^2 . A única combinação das grandezas com dimensão no problema que tem esta forma é mgl . Mas novamente não podemos desprezar a dependência em θ_0 , e a energia deve ter a forma $f(\theta_0)mgl$, onde f é alguma função. Isto é o máximo que podemos dizer com a análise dimensional. Entretanto, se pensarmos um pouco fisicamente, podemos dizer que a energia total do sistema é igual à energia potencial no ponto mais alto (já que é o ponto onde a massa está parada, e consequentemente a energia cinética é nula). Essa energia deve ser igual a $mgl(1 - \cos \theta_0)$. Usando a expansão de Taylor para $\cos \theta_0$, vemos que $f(\theta_0) = \theta_0^2/2 - \theta_0^4/24 + \dots$. Portanto, diferentemente do resultado encontrado para a frequência, o ângulo máximo θ_0 desempenha um papel essencial na energia.

Exemplo 2 - Sistema massa-mola

Uma mola de constante k e massa desprezível está presa à parede e possui uma massa m presa em sua outra ponta (veja Fig. I.2). A força que a mola faz em m é $F(x) = -kx$, onde x é o deslocamento a partir da posição de equilíbrio. O que podemos dizer sobre a frequência das oscilações?

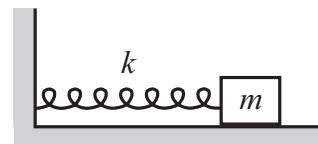


Figura I.2: Sistema massa-mola.

Solução: As únicas grandezas com dimensão neste problema são $[m] = M$, $[k] = M/T^2$ (que pode ser obtido notando que kx tem dimensões de força), e o deslocamento máximo em relação à posição de equilíbrio, $[x_0] = L$. (Há também o tamanho da mola no equilíbrio, mas como a força não depende dele, então a resposta também não pode depender.) Nosso objetivo é encontrar a frequência de oscilações, que tem unidades de $1/T$. A única combinação das grandezas dadas que possui essas unidades é

$$\omega = C\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (\text{I.4})$$

onde C é um número adimensional. Acontece que C é igual a 1 (assumindo que estamos medindo ω em radianos por segundo), mas não há como descobrir isso apenas usando a análise dimensional. Note que, diferentemente do caso do pêndulo, a frequência não possui nenhuma dependência com o deslocamento máximo.

O que podemos dizer sobre a energia total da mola? Energia tem unidades de ML^2/T^2 , e a única combinação das grandezas que possui essa forma é Bkx_0^2 , onde B é um número adimensional. Resolvendo o problema, podemos mostrar que $B = 1/2$, e a energia total é igual a $kx_0^2/2$.

OBSERVAÇÃO: Uma mola real não tem um potencial parabolico perfeito (isto é, uma força perfeitamente linear), e na verdade a força se parece mais com $F(x) = -kx + bx^2 + \dots$. Se truncarmos essa série no segundo termo, então teremos mais uma grandeza com dimensões para considerar, $[b] = M/LT^2$. Para formar uma grandeza com dimensões de frequência, $1/T$, precisamos que x_0 e b apareçam na combinação x_0b , porque é a única forma de acabar com a dependência em L . Você pode ver (utilizando a estratégia de escrever um produto geral das várias variáveis, discutida na terceira observação do exemplo do pêndulo) que a frequência deve ter a forma $f(x_0b/k)\sqrt{k/m}$, onde f é uma função desconhecida que não pode ser determinada pela análise dimensional. Desta forma, podemos ter uma dependência em x_0 neste caso. Essa resposta deve se reduzir ao caso anterior, $C\sqrt{k/m}$, para $b = 0$. Logo, f deve ser da forma $f(y) = C + c_1y + c_2y^2 + \dots$.

Exemplo 3 - Satélite em órbita baixa

Um satélite de massa m viaja em uma órbita circular próximo à superfície da Terra. O que podemos dizer sobre sua velocidade?

Solução: As únicas grandezas com dimensão no problema são $[m] = M$, $[g] = L/T^2$, e o raio da Terra $[R] = L$.² Nosso objetivo é encontrar a velocidade do satélite, que tem

²Você pode argumentar que a massa da Terra, M_T , e a constante universal da gravitação, G , deveriam ser incluídas aqui, porque a lei da gravitação universal para uma partícula na superfície da Terra é $F = GM_Tm/R^2$. Mas como essa força pode ser escrita como $m(GM_T/R^2) \equiv mg$, podemos absorver os efeitos de M_T e G em g .

unidades de L/T . A única combinação das grandezas dimensionais com esta dimensão é

$$v = C\sqrt{gR}. \quad (\text{I.5})$$

Resolvendo o problema, mostra-se que $C = 1$.

I.3 Série de Taylor

Antes de prosseguirmos, vamos relembrar alguns fatos importantes sobre este assunto. A *série de Taylor* é uma representação de uma função como uma soma de infinitos termos que envolvem as derivadas da própria função em um determinado ponto. A série de Taylor de uma função real ou complexa $f(x)$ que é infinitamente diferenciável em uma vizinhança de um número real ou imaginário a é a série de potências:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} \frac{(x-a)}{1!} + \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=a} \frac{(x-a)^2}{2!} + \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=a} \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=a} \frac{(x-a)^n}{n!} \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

No caso particular em que $a = 0$, a série também é chamada de *série de Maclaurin*.

Algumas expansões em série de Maclaurin muito importantes que você *deve* saber (todas são válidas também para valores complexos de x):

- Exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad \forall x. \quad (\text{I.7})$$

- Logarítmo natural:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots, \quad |x| \leq 1, x \neq 1. \quad (\text{I.8})$$

- Seno:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad \forall x. \quad (\text{I.9})$$

- Cosseno:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad \forall x. \quad (\text{I.10})$$

I.4 Aproximações, casos limites

Como com as unidades, a consideração de casos limites (ou talvez devêssemos dizer casos especiais) oferecem dois benefícios principais. Em primeiro lugar, pode lhe ajudar a começar o problema. Se você está tendo dificuldades em imaginar como um dado sistema se comporta, então você pode imaginar o que aconteceria, por exemplo, se um certo comprimento fosse muito grande ou muito pequeno. Se você se convencer que o comprimento afeta o sistema em casos extremos (ou talvez você descubra que o comprimento não afeta em nada), será mais fácil de entender como ele afeta o sistema no caso geral, o que por sua vez o ajudará a escrever as equações relevantes (leis de conservação, equações $F = ma$, etc.), e finalmente o permitirá resolver completamente o problema. Resumindo: modificar os vários parâmetros e ver quais são os efeitos sobre o sistema pode nos dar uma grande quantidade de informação.

Em segundo lugar, assim como a análise dimensional, verificar os casos limites (ou casos especiais) é uma coisa que você deve fazer *sempre* que terminar um cálculo. Mas assim como verificar as unidades, isso não vai lhe assegurar que sua resposta esteja correta, mas pode lhe dizer que ela está definitivamente incorreta. É geralmente verdade que sua intuição sobre casos limites é muito melhor do que sua intuição sobre valores genéricos dos parâmetros. Você deve usar esse fato a seu favor.

Vamos fazer alguns exemplos relacionados ao segundo benefício. As expressões iniciais dadas em cada exemplo são resoluções de problemas que você deverá saber resolver no final do curso. Por hora, apenas as aceite. Uma ferramenta que frequentemente aparece ao checar casos limites é a série de Taylor que acabamos de relembrar. Você deve dominar o uso desta técnica o mais rápido possível.

Exemplo 1 - Bola em queda

Uma bola é largada do repouso de uma altura h . Suponha que a força de resistência do ar seja da forma $F_{res} = -m\alpha v$. Veremos mais tarde que a velocidade e posição da

bola são dadas por

$$v(t) = -\frac{g}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad \text{e} \quad y(t) = h - \frac{g}{\alpha} \left(t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \right). \quad (\text{I.11})$$

Estas expressões são um pouco complicadas, e você não tem como saber se elas estão corretas. Eu posso ter cometido algum erro ao escrevê-las. Ou pior, eu posso ter errado na resolução do problema. Então vamos olhar alguns casos limites. Se estes casos levarem a resultados esperados, então podemos ficar um pouco mais confiantes de que estas respostas estejam realmente corretas.

Se t é muito pequeno (mais precisamente, se $\alpha t \ll 1$; veja a discussão depois deste exemplo), então podemos expandir a exponencial utilizando a série de Taylor adaptada da Eq. I.7, $e^{-x} \approx 1 - x + x^2/2$, para fazer aproximações até a ordem dominante em αt . Então, $v(t)$ na Eq. I.11 se torna

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{g}{\alpha} \left(1 - \left(1 - \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} - \dots \right) \right) \\ &\approx -gt, \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

mais termos de ordem superior em αt . Esta resposta é a esperada, porque a força de resistência do ar é desprezível no início da queda, e por isso temos uma bola caindo em queda livre, com aceleração g . Para pequenos valores de t , a Eq. I.11 também dá

$$\begin{aligned} y(t) &= h - \frac{g}{\alpha} \left[t - \frac{1}{\alpha} \left(1 - \left(1 - \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} - \dots \right) \right) \right] \\ &\approx h - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

mais termos de ordem superior em αt . Novamente, este resultado é esperado, porque no início da queda temos essencialmente uma bola em queda livre, então a distância percorrida é $gt^2/2$, resultado já bastante conhecido.

Podemos também olhar para grandes valores de t (ou melhor, αt grande). Neste caso, $e^{-\alpha t}$ é essencialmente zero, então $v(t)$ na Eq. I.11 se torna (não há necessidade de utilizar a série de Taylor neste caso)

$$v(t) \approx -\frac{g}{\alpha}. \quad (\text{I.14})$$

Esta é a “velocidade terminal”. Este valor faz sentido, porque é a velocidade na qual a força total, $-mg - m\alpha v$, se anula. Para grandes valores de t , a Eq. I.11 também resulta

em

$$y(t) \approx h - \frac{gt}{\alpha} + \frac{g}{\alpha^2}. \quad (\text{I.15})$$

Aparentemente, para grandes valores de t , g/α^2 é a distância (e isso tem mesmo unidades de comprimento, porque α tem unidades de T^{-1} , já que $m\alpha v$ tem unidades de força) que nossa bola atrasa comparada a uma bola que começa a cair com a velocidade terminal, $-g/\alpha$ (lembre-se que a resultante das forças neste caso é nula, e a velocidade é constante).

Sempre que você obtiver resultados aproximados como acabamos de fazer, você ganha alguma coisa e perde alguma coisa. Perde parte da verdade, claro, porque sua nova resposta não é tecnicamente correta. Mas ganha alguma beleza. Sua nova resposta é invariavelmente mais limpa (algumas vezes envolvendo apenas um termo), e faz com que fique mais fácil de ver o que está acontecendo.

No exemplo acima, não faz sentido ver o limite onde t é pequeno ou grande, porque t tem dimensões. Um ano é um tempo grande ou pequeno? E um centésimo de segundo? Não há como responder isso sem conhecer o problema com o qual se está lidando. Um ano é um tempo curto na escala da evolução galáctica, mas um centésimo de segundo é longo na escala de processos nucleares. Só faz sentido olhar o limite de pequenas (ou grandes) quantidades *adimensionais*. No exemplo acima, esta quantidade adimensional é αt . A constante α tem unidades de T^{-1} , então $1/\alpha$ estipula uma escala de tempo típica para o sistema. Desta forma, faz sentido olhar para o limite onde $t \ll 1/\alpha$ (isto é, $\alpha t \ll 1$), ou onde $t \gg 1/\alpha$ (isto é, $\alpha t \gg 1$). No limite de uma grandeza adimensional muito pequena, uma série de Taylor pode ser utilizada para expandir um resultado em potências desta quantidade pequena, como fizemos acima. Às vezes somos preguiçosos e dizemos coisa do tipo “No limite de pequenos valores de t ”. Mas você deve saber que o que realmente queremos dizer é “No limite de alguma grandeza adimensional que tem t no numerador”, ou “No limite onde t é muito menor do que uma certa quantidade que tem dimensão de tempo”. Como foi dito anteriormente, verificar casos especiais pode lhe dizer se (1) sua resposta é consistente com sua intuição, ou (2) ela está errada. Mas nunca lhe diz que sua resposta está definitivamente correta. Isso também acontece com o método científico. No mundo real, tudo se resume ao experimento. Se você tem uma teoria que acha que está

correta, você precisa verificar que suas previsões são consistentes com os experimentos. Os experimentos específicos que você realiza são análogos aos casos especiais que você verifica após resolver um problema; estas duas coisas representam o que você sabe que é verdade. Se os resultados dos experimentos são inconsistentes com sua teoria, então você precisa voltar e consertá-la, assim como você precisaria voltar e consertar sua resposta. Se, por outro lado, seus resultados são consistentes, então, apesar disso ser uma coisa boa, a única coisa que isso realmente lhe diz é que sua teoria *pode* estar correta. E se olharmos como as coisas aconteceram até agora, as chances são de que a teoria provavelmente não esteja correta de verdade, mas que deve ser um caso limite de uma outra teoria ainda mais correta (assim como a física Newtoniana é um caso limite da física relativística, que é um caso limite da teoria quântica de campos, etc.). É assim que a física funciona. Para realmente provar uma afirmação seria necessário um número infinito de experiências, cobrindo todos os casos possíveis. Como isto é impossível, temos que nos contentar em aceitar as afirmações que (ainda) não pudemos provar serem falsas.

Uma pergunta que você deve estar se fazendo é: quando estamos fazendo uma aproximação, como sabermos quantos termos na expansão devemos manter? No exemplo anterior, utilizamos $e^{-x} \approx 1 - x + x^2/2$. Mas por que paramos no termo x^2 ? A resposta mais honesta (e levemente brincalhona) é “porque eu já tinha feito este problema antes de escrevê-lo, então eu sabia quantos termos manter”. Mas a resposta mais informativa (apesar de não ser de grande ajuda) é que antes de fazer os seus cálculos, não há como saber quantos termos manter. Então você deve ficar com alguns e ver o que acontece. Se todos os termos cancelarem, então quer dizer que você deve refazer as contas com mais um termo na série. Por exemplo, na Eq. I.13, se tivéssemos parado a série de Taylor em $e^{-x} \approx 1 - x$, teríamos obtido $y(t) = h - 0$, o que não é muito útil, já que o objetivo é obter o comportamento dominante da dependência no parâmetro que estamos olhando (que é o tempo t neste caso). Para isso, teríamos que voltar atrás e incluir o termo $x^2/2$ na expansão. Se estivéssemos resolvendo um problema no qual ainda assim nenhuma dependência em t (ou qualquer que seja a variável) aparecesse, então teríamos que voltar e incluir o termo $-x^3/6$ na expansão. Claro que você pode desde o início manter termos até, por exemplo, quinta ordem por garantia. Mas isso não é uma estratégia boa, porque provavel-

mente nunca irá precisar ir tão longe em uma expansão. Então comece com apenas um ou dois termos e veja em que eles resultam. Note que na Eq. I.12 nós não precisamos do termo de segunda ordem, e poderíamos ter obtido este resultado apenas com $e^{-x} \approx 1 - x$. Mas ter o termo extra aqui não nos causou muitos problemas.

Depois de fazer uma aproximação, como sabermos se ela é “boa”? Assim como não faz sentido perguntar se uma grandeza com dimensão é grande ou pequena sem comparar com outra de mesma dimensão, não faz sentido perguntar se uma aproximação é “boa” ou “ruim” sem dizer a precisão que você quer. No exemplo acima, se você está olhando para um valor de t para o qual $\alpha t \approx 1/100$, então o termo que ignoramos na Eq. I.12 é menor que gt por um fator $\alpha t/2 \approx 1/200$. Então o erro é da ordem de 1%. Se essa precisão é boa o suficiente para o seu propósito, então isso é uma boa aproximação. Senão, é uma aproximação ruim, e você deve adicionar mais termos na expansão, até obter a precisão desejada.

Os resultados de verificar limites geralmente caem em duas categorias. Na maioria das vezes você sabe como deve ser o resultado, então isso fornece uma verificação de sua resposta. Mas às vezes um limite interessante aparece que você não esperava. Este é o caso dos próximos exemplos.

Exemplo 2 - Duas massas em 1D



Figura I.3: Massas em 1D.

Uma massa m com velocidade v se aproxima de uma massa M em repouso (veja Fig. I.3). As massas colidem elasticamente. Suponha que todo movimento seja unidimensional. Você já deve ter obtido o resultado seguinte

para as velocidades das partículas após a colisão:

$$v_m = \frac{(m - M)v}{m + M}, \quad \text{e} \quad v_M = \frac{2mv}{m + M}. \quad (\text{I.16})$$

Há três casos especiais que devemos olhar:

- Se $m = M$, então a Eq. I.16 nos diz que a massa m para, e M ganha uma velocidade v . Isso é aceitável (ainda mais para quem já jogou sinuca). E se torna ainda mais

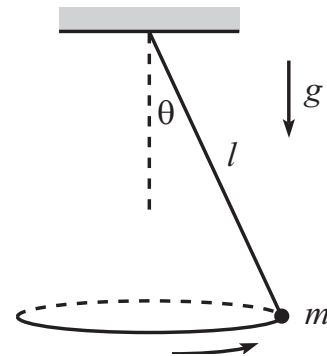
claro quando você percebe que essas velocidades finais satisfazem a conservação de energia e momento com as condições iniciais dadas.

- Se $M \gg m$, então m bate e volta com velocidade $\approx v$, e M praticamente não se movimenta. Isso faz sentido, porque M é basicamente uma parede.
- Se $m \gg M$, então m continua se movendo com velocidade $\approx v$, e M ganha uma velocidade $\approx 2v$. Esta velocidade $2v$ é um resultado inesperado e interessante (é mais fácil de ver o que acontece considerando o referencial da massa mais pesada m), e isso leva a alguns efeitos interessantes, como veremos mais para frente no curso.

Exemplo 3 - Pêndulo circular

Uma massa é pendurada em um barbante de massa desprezível e de tamanho l . Ela é colocada pra girar em um movimento circular horizontal, com a corda fazendo um ângulo constante θ com a vertical (veja Fig. I.4). Pode-se provar que a frequência angular deste movimento, ω , é

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}. \quad (\text{I.17})$$



Em relação a θ , há dois casos limites que devemos verificar. Figura I.4: Pêndulo circular.

- Se $\theta \rightarrow 90^\circ$, então $\omega \rightarrow \infty$. Isso faz sentido: a massa tem que girar *muito* rápido para não cair.
- Se $\theta \rightarrow 0^\circ$, então $\omega \rightarrow \sqrt{g/l}$, que é a mesma frequência do pêndulo simples de comprimento l (para pequenas oscilações). Este resultado é muito interessante e não tão óbvio. (Mas você pode se convencer disso olhando uma projeção do movimento em uma linha horizontal qualquer.)

Nos exemplos acima, nós verificamos os casos limites e casos especiais de respostas que estavam corretas (eu espero!). Todo esse processo é mais útil (e um pouco mais divertido) quando você verifica os limites de respostas que estão *incorretas*. Neste caso, você consegue ver que sua resposta está errada com certeza. Mas ao invés de levar você ao desespero, você deve ficar feliz com isso, considerando que a alternativa é continuar com a resposta errada sem saber. Uma vez tendo descoberto que sua resposta está errada, você pode voltar e procurar onde cometeu o erro (talvez verificando os limites em vários estágios para ir eliminando onde o erro pode estar). Verificar os casos limites é uma estratégia que pode lhe poupar muitos problemas no futuro.

Capítulo II

Usando $F = ma$

O objetivo principal da mecânica clássica é determinar o que acontece com um determinado conjunto de objetos em uma dada situação física. Para resolver estes problemas, precisamos saber o que faz os objetos se moverem da maneira como o fazem. Há duas maneiras de alcançar este objetivo. A primeira, com a qual você já deve estar familiarizado, envolve as leis de Newton. Vamos estudar este assunto a partir de agora. A segunda maneira, mais avançada, é o método Lagrangeano. Este assunto será abordado mais a frente no curso. Cada um desses métodos é suficiente para resolver qualquer problema, e os dois nos dão as mesmas informações no final. Mas eles são baseados em princípios completamente diferentes, como veremos depois. Começaremos então pelas leis de Newton.

II.1 Leis de Newton

Em 1687, Newton publicou suas três leis em seu *Principia Mathematica*. Essas leis podem ser hoje consideradas como bastante intuitivas, apesar de ser questionável utilizar o adjetivo “intuitivas” para um conjunto de afirmações que não tinham sido escritas até cerca de 300 anos atrás. Essas leis podem ser ditas da seguinte forma:

- **Primeira lei:** Um corpo se move com velocidade constante (que pode ser zero) a não ser que uma força atue neste corpo.

- **Segunda lei:** A taxa de variação temporal do momento de um corpo é igual a força agindo neste corpo.
- **Terceira lei:** Para toda força que age em um corpo, há uma outra força de mesmo módulo e de sentido oposto atuando *em outro corpo*.

Vamos analisar cada uma delas separadamente:

Primeira Lei

Esta lei define o que é força nula. Além disso, ela dá a definição de *referencial inercial*, que é definido simplesmente como um referencial em que a primeira lei é válida; como é usado o termo “velocidade”, é preciso dizer em qual referencial estamos medindo esta velocidade. A primeira lei *não* vale em qualquer referencial. Por exemplo, ela falha em uma plataforma giratória.¹ Intuitivamente, um referencial inercial é um que se move com velocidade constante. Mas esta definição é ambígua, porque precisamos dizer em relação a que o referencial tem velocidade constante. De qualquer forma, um referencial inercial é definido como um tipo especial de referencial no qual a primeira lei é válida.

Assim, temos duas definições, de “força” e “referencial inercial”, conectadas. Não há muito conteúdo físico nisso. Mas o importante é que a lei é válida para *todas* as partículas. Portanto, se temos um referencial em que uma partícula livre se move com velocidade constante, então *todas* se movem com velocidade constante. Isso é uma afirmação com conteúdo. Não podemos ter um grupo de partículas livres se movendo com velocidade constante enquanto outro grupo faz um movimento mais complicado.

Segunda Lei

O momento (não relativístico, que é o que estudaremos neste curso) é definido como $m\mathbf{v}$. Se m é constante,² então a segunda lei diz que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (\text{II.1})$$

¹É possível fazer algumas modificações de forma que as leis de Newton continuem válidas neste referencial. Para isso, precisamos introduzir as chamadas forças “fictícias”. Isto será assunto do capítulo 9.

²Veremos mais a frente alguns casos em que isso não acontece, como em foguetes.

onde $\mathbf{a} \equiv d\mathbf{v}/dt$. Esta lei vale apenas em referenciais inerciais, definidos pela primeira lei.

Você pode pensar que a segunda lei apenas dá uma definição para força, mas há mais nela do que isso. Esta lei implica em que essa “força” seja alguma coisa que possua uma existência que pode ser independente da partícula de massa “ m ” que aparece na lei e sobre a qual ela atua (falaremos mais sobre isso quando discutirmos a terceira lei). A força feita por uma mola, por exemplo, não depende da partícula em que ela age. A força gravitacional GMm/r^2 depende parcialmente da partícula e parcialmente de outra coisa (outra massa).

Se você quisesse criar definições, poderia definir uma nova quantidade, $\mathbf{G} = m^2\mathbf{a}$, por exemplo. Isso é perfeitamente válido se fazer; você não pode errar fazendo uma definição (a não ser, é claro, que já tenha definido esta quantidade como outra coisa). Entretanto, essa definição é completamente inútil. Você pode defini-la para cada partícula do universo, e para cada aceleração, mas o problema é que os objetos assim definidos não terão nenhuma relação entre si. Simplesmente não há nenhuma quantidade (descoberta) no mundo que produza uma aceleração 4 vezes menor agindo em uma massa $2m$ do que quando age sobre uma massa m . A quantidade $\mathbf{G}$ não tem nada a ver com nada, a não ser com a própria partícula na qual você a definiu, e é impossível construir uma situação experimental na qual façamos outra partícula “sofrer” a ação desta quantidade. A principal coisa que a segunda lei diz é que existe uma quantidade $\mathbf{F}$ que dá o mesmo $m\mathbf{a}$ quando agindo em partículas distintas. A afirmação da existência de tal coisa é muito mais que uma definição.

Nesta mesma linha de pensamento, note que a segunda lei diz que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, e não, por exemplo, $\mathbf{F} = m\mathbf{v}$, ou $\mathbf{F} = md^3\mathbf{x}/dt^3$. Além de serem inconsistentes com o mundo real, estas expressões são inconsistentes com a primeira lei. $\mathbf{F} = m\mathbf{v}$ diria que uma velocidade não nula necessitaria de uma força, em contraste com a primeira lei. E $\mathbf{F} = md^3\mathbf{x}/dt^3$ diria que uma partícula se moveria com aceleração constante (ao invés de velocidade constante), a não ser que atue uma força sobre ela, também em contraste com a primeira lei.

Assim como a primeira lei, é importante perceber que a segunda lei vale para *todas* as partículas. Em outras palavras, se a mesma força (por exemplo, a mesma mola esticada da mesma quantidade) atua em duas partículas de massas m_1 e m_2 , então a Eq. II.1 diz que suas acelerações estão relacionadas por

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (\text{II.2})$$

Esta relação vale qualquer que seja a força. Desta forma, uma vez que utilizamos uma força para encontrar a relação entre as massas de dois objetos, então saberemos qual será a relação entre suas acelerações quando submetidas a qualquer outra força. Claro que ainda não definimos o que é *massa*. Mas a Eq. II.2 dá um método experimental para determinar uma massa de um objeto em termos de um padrão de massa (digamos, 1kg). Tudo que temos que fazer é comparar sua aceleração com aquela da massa padrão, quando submetidas à mesma força.

Note que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ é uma equação vetorial, que representa na verdade três equações em uma. Em coordenadas cartesianas, ela diz que $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$, e $F_z = ma_z$.

Terceira Lei

Uma coisa que esta lei diz é que se temos duas partículas isoladas interagindo através de uma força, então suas acelerações têm sentidos opostos e são inversamente proporcionais a suas massas. Equivalentemente, a terceira lei essencialmente postula que o momento total de um sistema isolado é conservado (isto é, não varia no tempo). Para ver isso, considere duas partículas que somente interagem entre si. Teremos então

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_{total}}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \\ &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

onde $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são as forças que agem em m_1 e m_2 , respectivamente. Isso demonstra que a conservação de momento (isto é, $d\mathbf{p}_{total}/dt = 0$) é equivalente à terceira lei de Newton, $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. O mesmo raciocínio vale para mais de duas partículas, mas estudaremos o caso geral no capítulo 3.

A terceira lei não é uma definição, pois ela nem sempre é válida. Para forças de contato ela se aplica, mas ela falha para a força magnética, por exemplo. Neste caso, o

campo eletromagnético carrega momento (e então é o momento total, da partícula e do campo, que é conservado). Mas não vamos tratar destes casos aqui. Trataremos apenas de partículas. Portanto, a terceira lei sempre valerá nas situações que abordaremos.

A terceira lei contém uma informação muito importante: ela diz que nunca encontraremos uma partícula acelerando a não ser que haja uma outra partícula que também esteja acelerando em outro lugar. A outra partícula pode estar longe da primeira, como no sistema Terra-Sol, mas sempre está em algum lugar. Note que se nos fosse dada apenas a segunda lei, seria perfeitamente possível uma partícula acelerar espontaneamente, sem nada mais acontecer no universo, assim como uma partícula com o dobro da massa, colocada no mesmo lugar, poderia acelerar com o metade da aceleração da primeira, etc. Isso tudo seria viável, no que diz respeito a segunda lei. Diríamos que uma força com um certo valor age naquele ponto, e tudo seria consistente. Mas a terceira lei diz que não é assim que o nosso mundo funciona. De certa forma, uma força sem o seu par soa como mágica, enquanto uma força e seu par de igual módulo e sentido oposto têm uma natureza simétrica de “causa e efeito” que parece (e aparentemente é) mais físico.

Entretanto, não devemos colocar significado exagerado nas leis de Newton pois, apesar delas serem avanços intelectuais incríveis e de funcionarem muito bem para a física do dia-a-dia, elas são leis de uma teoria que é apenas aproximada. A física newtoniana é um caso limite de teorias mais corretas da relatividade e da mecânica quântica, que por sua vez são casos limites de teorias ainda mais corretas. A maneira com que as partículas (ou ondas, ou cordas, ou o que quer que seja) interagem a nível mais fundamental certamente não se parece em nada com o que chamamos de força.

Certas questões, envolvendo principalmente o conteúdo experimental destas leis, a definição precisa do conceito de força e a aparente redundância contida no fato de que a primeira lei parece poder ser deduzida da segunda, são ainda objeto de debate, principalmente no contexto da epistemologia. Uma outra forma destes enunciados, que tenta esclarecê-las, será apresentada no capítulo 1. Estas diferentes formas de enunciar as leis de Newton não mudam, no entanto, o caráter da matemática envolvida na solução de problemas de mecânica, e é sobre isso que nos debruçaremos no restante desta introdução.

II.2 Diagramas de corpo livre

A lei que nos permite obter resultados quantitativos é a segunda. Dada uma força, podemos aplicar $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para encontrar a aceleração. E conhecendo a aceleração, podemos determinar o comportamento de um dado objeto (isto é, sua posição e velocidade), considerando que conhecemos sua posição e velocidade iniciais. Este processo pode dar certo trabalho em alguns casos, mas há dois tipos de situações básicas que geralmente aparecem:

- Em muitos problemas, é dada uma situação física (por exemplo, um bloco em repouso em cima de um plano, cordas conectando massas, etc.) e você deve encontrar todas as forças que agem em todos os objetos, utilizando $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. As forças geralmente apontam em várias direções, então é fácil esquecer de algumas delas. Isto mostra que é útil isolar os objetos e desenhar todas as forças que agem em cada um deles. Este é o assunto desta seção.
- Em outros problemas, é *dada* a força explicitamente como função do tempo, posição, ou velocidade, e a tarefa se torna resolver matematicamente a equação $F = ma \equiv m\ddot{x}$ (vamos trabalhar apenas com uma dimensão por enquanto). Estas *equações diferenciais* podem ser difíceis (ou impossíveis) de se resolver exatamente. Elas são assunto da próxima seção.

Há muitos tipos de forças no universo, e a maioria daquelas com que precisaremos lidar em problemas de mecânica são manifestações macroscópicas de fenômenos microscópicos mais complicados. Não é, em geral, necessário levar em conta estes detalhes microscópicos ao resolver um problema de mecânica. Há quatro tipos de força que aparecem com frequência nestes problemas:

- **TENSÃO:** nome dado à força que uma corda, uma vara, etc. exerce quando é puxada. Muitos problemas envolvem cordas de massa desprezível. Neste caso, a tensão deve ser a mesma em cada ponto da corda; caso contrário, haveria uma resultante que produziria uma aceleração infinita (de acordo com $F = ma$) neste pedaço sem massa.

- **NORMAL:** força perpendicular (sinônimo de normal) à uma superfície de contato, que esta faz sobre um corpo apoiado sobre ela e que impede que este corpo penetre a superfície.
- **ATRITO:** força feita por uma superfície de contato sobre um objeto apoiado sobre ela quando este desliza, ou tenta deslizar; esta força é paralela à superfície de contato. Geralmente, a força total que uma superfície faz em um objeto é uma combinação da força normal e da força de atrito.
- **GRAVIDADE:** esta é a força com que os objetos se atraem. A lei da gravitação universal, formulada por Newton, diz que a força entre duas partículas de massa m e M é atrativa e de módulo $F = GMm/R^2$.

Vamos considerar aqui o primeiro dos casos descritos acima, onde nos é apresentada a situação física e devemos determinar todas as forças envolvidas. O termo *diagrama de corpo livre* é utilizado para denotar um diagrama com todas as forças que atuam em determinado objeto. Após desenharmos este diagrama para cada objeto da configuração, basta escrevermos todas as equações $F = ma$ que eles implicam. O resultado será um sistema de equações lineares de várias forças e acelerações desconhecidas, que podemos então tentar resolver. Este processo é melhor entendido com um exemplo.

Exemplo 1 - Plano inclinado

Uma massa M_1 é segura em um plano com ângulo de inclinação θ , e uma massa M_2 é pendurada ao lado do plano. As duas massas estão conectadas por um fio de massa desprezível que passa por uma roldana também de massa desprezível (veja Fig. II.1). O coeficiente de atrito cinético entre M_1 e o plano é μ . M_1 é então solta a

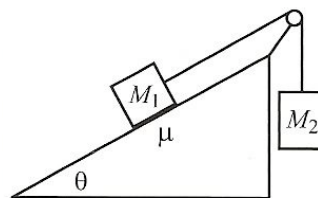


Figura II.1: Plano inclinado.

partir do repouso. Supondo que M_2 seja suficientemente grande para que M_1 seja puxada para cima no plano, qual é a aceleração das massas? Qual a tensão na corda?

Solução: A primeira coisa a se fazer é desenhar todas as forças que atuam nas duas massas. Elas são mostradas na Fig. II.2. As forças em M_2 são o peso e a tensão. As forças em M_1 são: peso, atrito, tensão, e a força normal. Note que a força de atrito aponta para baixo do plano, porque estamos supondo que M_1 se move para cima.

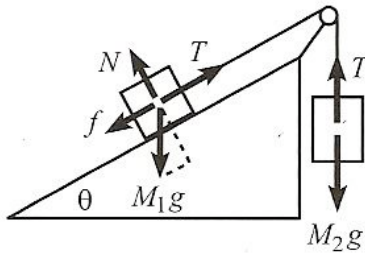


Figura II.2: Diagrama de corpo livre.

Tendo desenhado todas as forças, podemos agora escrever todas as equações $F = ma$. Para a massa M_1 , poderíamos separar as forças em suas componentes horizontal e vertical, mas é muito mais simples utilizar as componentes paralela e perpendicular ao plano.³ Estas duas componentes de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, junto com a

equação $F = ma$ para a componente vertical em M_2 , nos dão

$$\begin{aligned} T - f - M_1 g \sin \theta &= M_1 a, \\ N - M_1 g \cos \theta &= 0, \\ M_2 g - T &= M_2 a, \end{aligned} \tag{II.4}$$

onde usamos o fato de as duas massas possuírem a mesma aceleração (e definimos o sentido positivo de M_2 para baixo). Também usamos o fato da tensão ser a mesma nas duas pontas da corda, pois caso contrário haveria uma resultante agindo na corda que a faria ter uma aceleração infinita, já que sua massa é desprezível.

Há quatro incógnitas na Eq. II.4 (são elas T , a , N , e f), mas apenas três equações. Felizmente, temos uma quarta equação $f = \mu N$, porque estamos supondo que M_1 está se movendo, e então podemos utilizar a expressão para o atrito cinético. Utilizando esta equação junto com a segunda equação do sistema acima, obtemos que $f = \mu M_1 g \cos \theta$. A primeira equação se torna então $T - \mu M_1 g \cos \theta - M_1 g \sin \theta = M_1 a$. Somando à

³Quando trabalhamos com planos inclinados, normalmente um desses dois casos é muito melhor do que o outro. Em alguns casos não é claro qual dos dois, mas se você estiver trabalhando com um deles e estiver muito complicado, você sempre pode tentar o outro.

terceira equação, ficamos apenas com a incógnita a , e encontramos

$$a = \frac{g(M_2 - \mu M_1 \cos \theta - M_1 \sin \theta)}{M_1 + M_2} \implies T = \frac{M_1 M_2 g(1 + \mu \cos \theta + \sin \theta)}{M_1 + M_2}. \quad (\text{II.5})$$

Note que, para M_1 acelerar para cima (isto é, $a > 0$), temos que ter $M_2 > M_1(\mu \cos \theta + \sin \theta)$. Isto fica claro olhando para as componentes das forças que agem paralelamente ao plano.

OBSERVAÇÃO: Se supomos que M_1 é suficientemente grande de forma que ela desliza para baixo no plano, então a força de atrito apontaria para cima, e encontraríamos (verifique!)

$$a = \frac{g(M_2 + \mu M_1 \cos \theta - M_1 \sin \theta)}{M_1 + M_2}, \quad \text{e} \quad T = \frac{M_1 M_2 g(1 - \mu \cos \theta + \sin \theta)}{M_1 + M_2}. \quad (\text{II.6})$$

Para que M_1 tenha de fato uma aceleração para baixo (isto é, $a < 0$), temos que ter $M_2 < M_1(\sin \theta - \mu \cos \theta)$. Portanto, os valores de M_2 para os quais o sistema não acelera (isto é, o sistema fica parado, assumindo que ele começou do repouso) é

$$M_1(\sin \theta - \mu \cos \theta) \leq M_2 \leq M_1(\sin \theta + \mu \cos \theta). \quad (\text{II.7})$$

Se μ é muito pequeno, então M_2 deve ser praticamente igual a $M_1 \sin \theta$ para que o sistema permaneça estático. A Eq. II.7 também implica que se $\tan \theta \leq \mu$, então M_1 não vai deslizar, mesmo se $M_2 = 0$.

Em problemas como o que acabamos de resolver, fica claro quais são os objetos que você precisa desenhar as forças. Mas em outros problemas, onde há vários subsistemas diferentes que você pode escolher, você deve tomar cuidado ao incluir todas as forças relevantes em um dado subsistema. Quais subsistemas você vai escolher depende em quais grandezas você está tentando encontrar. Veja o exemplo seguinte.

Exemplo 2 - Plataforma

Uma pessoa está sobre um sistema de plataforma e roldana como mostra a Fig. II.3. As massas da plataforma, da pessoa e da roldana⁴ são M , m e μ , respectivamente. A corda tem massa desprezível. A pessoa puxa a corda para cima de forma que ela tem uma aceleração a para cima. (Suponha que a plataforma fique sempre nivelada na horizontal, por exemplo, presa a trilhos sem atrito em suas pontas.) Encontre a tensão na corda, a força normal entre a pessoa e a plataforma, e a tensão na haste que conecta a roldana na plataforma.

Solução: Para encontrar a tensão na corda, simplesmente escolhamos nosso subsistema sendo todo o conjunto (exceto o teto). Se imaginarmos todo o conjunto dentro de uma caixa preta (para enfatizar o fato de que não estamos interessados nas forças internas do conjunto), então as forças que “emergem” da caixa são os três pesos (Mg , mg e μg) para baixo, e a tensão T para cima. Aplicando $F = ma$ para o sistema completo, obtemos

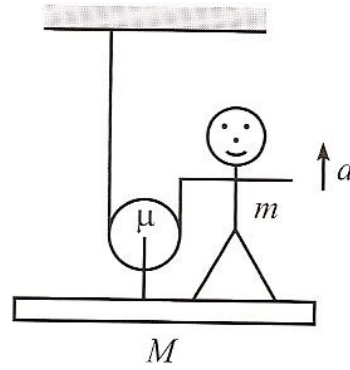


Figura II.3: Plataforma e roldana.

$$T - (M + m + \mu)g = (M + m + \mu)a \implies T = (M + m + \mu)(g + a). \quad (\text{II.8})$$

Para encontrar a força normal N entre a pessoa e a plataforma, e também a tensão f na haste que conecta a roldana à plataforma, não é suficiente considerar o sistema como um todo. Isso acontece porque essas forças são internas ao sistema, então elas não aparecem nas equações $F = ma$ (que envolvem apenas as forças externas a um determinado sistema). Precisamos considerar subsistemas:

- Vamos aplicar $F = ma$ para a pessoa. As forças agindo nela são: peso, força normal da plataforma, e a tensão da corda (puxando sua mão para baixo). Temos então:

$$N - T - mg = ma. \quad (\text{II.9})$$

⁴Suponha que a massa da roldana está concentrada em seu centro, de forma que não precisamos nos preocupar com a dinâmica da rotação (que veremos mais a frente no curso).

- Agora vamos aplicar $F = ma$ para a plataforma. As forças agindo nela são: peso, força normal da pessoa, e a tensão da haste para cima. Sendo assim, temos:

$$f - N - Mg = Ma. \quad (\text{II.10})$$

- Por fim, vamos aplicar $F = ma$ para a roldana. As forças que agem na roldana são: peso, tensão da haste para baixo, e *duas vezes* a tensão da corda (porque ela é puxada pelos dois lados). Então temos

$$2T - f - \mu g = \mu a. \quad (\text{II.11})$$

Note que se somarmos as três equações anteriores, obtemos a equação $F = ma$ da Eq. II.8, como deveria ser, já que o sistema como um todo é a soma dos três subsistemas acima. As Eqs. II.9-II.11 são três equações com três incógnitas: T , N , e f . A soma das três resulta em T da Eq. II.8, e as Eqs. II.9 e II.11 dão, respectivamente, como você pode mostrar,

$$N = (M + 2m + \mu)(g + a), \quad \text{e} \quad f = (2M + 2m + \mu)(g + a). \quad (\text{II.12})$$

OBSERVAÇÕES: Você também poderia obter estes resultados considerando subsistemas diferentes do que escolhemos acima. Por exemplo, você pode escolher o subsistema roldana-plataforma, etc. Mas não importa como você divide o sistema, você precisará produzir três equações $F = ma$ independentes para poder resolver para as três incógnitas T , N , e f .

Em problemas como esse, é fácil de esquecer de incluir certas forças, como a segunda tensão T na Eq. II.11. A maneira mais fácil de resolver o problema é sempre isolar cada subsistema, desenhar uma caixa em volta dele, e então desenhar todas as forças que “emergem” da caixa. Em outras palavras, desenhe o diagrama de corpo livre. A Fig. II.4 mostra o diagrama de corpo livre para

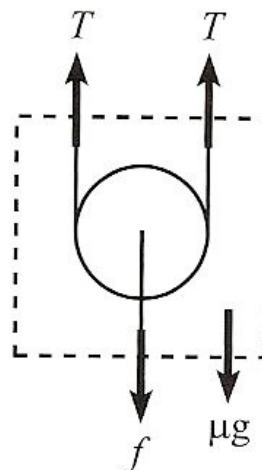


Figura II.4: Diagrama de corpo livre.

o subsistema composto apenas pela roldana.

Outra classe de problemas, parecidos com o exemplo acima, são as chamadas *máquinas de Atwood*. Uma máquina de Atwood é o nome dado para qualquer sistema composto por uma combinação de massas, cordas e roldanas. Em geral, as roldanas e cordas podem ter massas, mas neste capítulo vamos apenas trabalhar com as que têm massas desprezíveis. Como veremos no próximo exemplo, há dois passos básicos para resolver um problema desses: (1) escrever todas as equações $F = ma$, e (2) relacionar as acelerações das várias massas sabendo que o comprimento da(s) corda(s) não varia (inextensível).

Exemplo 3 - Máquina de Atwood

Considere o sistema de roldanas da Fig. II.5, com massas m_1 e m_2 . As cordas e roldanas têm massas desprezíveis. Quais são as acelerações das massas? Qual a tensão na corda?

Solução: A primeira coisa a se fazer é notar que a tensão T é a mesma por toda a corda de massa desprezível, de outra forma haveria uma resultante na corda que a faria ter uma aceleração infinita. Deste modo, vemos que a tensão

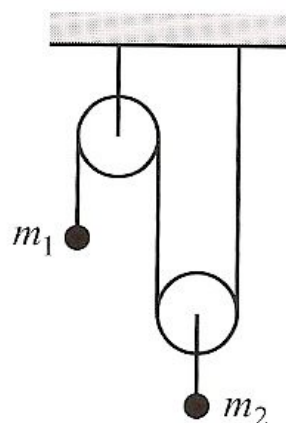


Figura II.5: Máquina de Atwood.

na pequena corda que liga a roldana a m_2 é $2T$. Isto acontece porque a resultante na roldana da direita tem que ser nula, pois ela produziria uma aceleração infinita na roldana de massa desprezível. As equações $F = ma$ para as duas massas são (considerando o sentido para cima como positivo)

$$\begin{aligned} T - m_1 g &= m_1 a_1, \\ 2T - m_2 g &= m_2 a_2. \end{aligned} \tag{II.13}$$

Temos agora duas equações e três incógnitas: a_1 , a_2 , e T . Então precisamos de mais uma equação. Esta vem do fato da corda ser inextensível, e relaciona a_1 com a_2 . Se m_2 e a roldana da direita se movessem para cima uma distância d , então haveria um comprimento de corda de tamanho $2d$ que teria “desaparecido” das duas partes da corda que tocam na roldana da direita. Esta corda tem que ir para algum lugar, e ela vai para a parte que está ligada a m_1 (veja Fig. II.6).

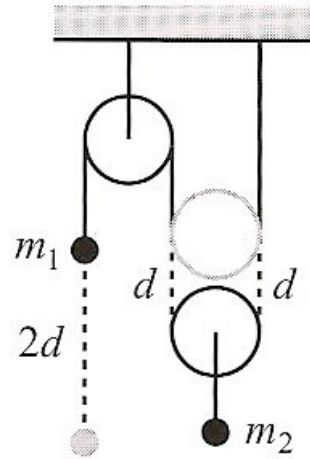


Figura II.6: Deslocamento das massas.

Portanto, m_1 desce uma distância de $2d$. Em outras palavras, $y_1 = -2y_2$, onde y_1 e y_2 são medidos com relação à posição inicial das massas. Derivando duas vezes esta equação, obtemos a relação entre acelerações a_1 e a_2 desejada:

$$a_1 = -2a_2. \quad (\text{II.14})$$

Combinando esta equação com a Eq. II.13, podemos resolver e encontrar a_1 , a_2 e T . O resultado é

$$a_1 = g \frac{2m_2 - 4m_1}{4m_1 + m_2}, \quad a_2 = g \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}, \quad T = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}. \quad (\text{II.15})$$

OBSERVAÇÕES: Há muitos limites e casos especiais que podemos verificar neste resultado. Alguns deles são: (1) Se $m_2 = 2m_1$, então a Eq. II.15 se torna $a_1 = a_2 = 0$, e $T = m_1 g$. Tudo em repouso. (2) Se $m_2 \gg m_1$, então a Eq. II.15 se torna $a_1 = 2g$, $a_2 = -g$, e $T = 3m_1 g$. Neste caso, m_2 cai praticamente em queda livre, enquanto m_1 é jogada para cima com aceleração $2g$. O valor de T é o necessário para fazer com que a força resultante em m_1 seja igual a $m_1(2g)$, já que $T - m_1 g = 3m_1 g - m_1 g = m_1(2g)$. Você pode verificar o caso em que $m_1 \gg m_2$.

Para o caso mais geral onde há N massas ao invés de duas, a equação que aparece devido à corda ser inextensível relaciona todas as N acelerações em uma única equação. Ela é mais fácil de se obter imaginando que movemos $N - 1$ massas, cada uma de uma quantidade arbitrária, e ver o que acontece com a última massa. Note que esses movimen-

tos arbitrários *não* correspondem ao movimento real das massas. Isto não é problema; a equação que surge devido ao tamanho da corda ser fixo não tem nada a ver com as N equações $F = ma$. A combinação das $N + 1$ equações é necessária para confinar todos os movimentos em um único conjunto.

II.3 Resolvendo equações diferenciais

Vamos considerar agora os problemas nos quais são dadas as forças em função do tempo, da posição, ou da velocidade, e nossa tarefa é resolver a equação diferencial $F = ma \equiv m\ddot{x}$ para encontrar a posição em função do tempo, $x(t)$. Nesta seção, vamos desenvolver algumas técnicas para resolver equações diferenciais. A habilidade em aplicar estas técnicas aumenta dramaticamente o número de sistemas que conseguimos compreender.

Também pode acontecer da força ser uma função de derivadas de ordem maior em x , além das grandezas t , x , e $v \equiv \dot{x}$. Mas estes casos não são comuns, e não vamos nos preocupar com eles. A equação diferencial $F = ma$ que queremos resolver é então (vamos trabalhar apenas com uma dimensão por enquanto)

$$m\ddot{x} = F(t, x, v). \quad (\text{II.16})$$

Nem sempre esta equação pode ser resolvida exatamente para $x(t)$. Mas para a maioria dos problemas que vamos tratar aqui, ela pode ser resolvida. Os problemas que vamos encontrar vão sempre cair em um de três casos especiais: F é função apenas de t , ou apenas de x , ou apenas de v . Em todos os três casos, precisaremos usar as condições iniciais dadas, $x_0 \equiv x(t_0)$ e $v_0 \equiv v(t_0)$, para obter os resultados finais. Estas condições iniciais vão aparecer nos limites de integração na discussão seguinte.⁵

⁵Não é coincidência que precisemos de *duas* condições iniciais para especificar completamente a solução para nossa equação diferencial de *segunda*-ordem (que quer dizer que a maior derivada em x que aparece na equação é a segunda). Um resultado geral (que vamos usar aqui sem demonstração) é que a solução para uma equação diferencial de ordem n possui n parâmetros livres, que são determinados pelas condições iniciais.

- F é apenas função de t : $F = F(t)$.

Como $a = d^2x/dt^2$, precisamos apenas integrar $F = ma$ duas vezes para obter $x(t)$. Vamos fazer isso de uma maneira sistemática, para nos acostumar com o procedimento geral. Primeiro, escrevemos $F = ma$ como

$$m \frac{dv}{dt} = F(t). \quad (\text{II.17})$$

Então, fazemos a separação de variáveis e integramos os dois lados da equação para obter

$$m \int_{v_0}^{v(t)} dv' = \int_{t_0}^t F(t') dt'. \quad (\text{II.18})$$

Colocamos as linhas nas variáveis de integração para não confundí-las com os limites de integração. Lembre que as variáveis de integração são sempre mudas e seu símbolo pode ser qualquer um. A integral de dv' é apenas v' , e a Eq. II.18 nos dá v em função de t , isto é, $v(t)$. Podemos então separar as variáveis em $dx/dt \equiv v(t)$ e integrar para obter

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^t v(t') dt'. \quad (\text{II.19})$$

Esta equação nos dá x como função de t , isto é, $x(t)$. Este procedimento pode parecer uma maneira incomoda e longa demais para simplesmente integrar alguma coisa duas vezes. E isso é verdade, neste caso bem simples. Mas a técnica se mostra mais útil no caso seguinte.

- F é apenas função de x : $F = F(x)$.

Vamos usar

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (\text{II.20})$$

para escrever $F = ma$ como

$$mv \frac{dv}{dx} = F(x). \quad (\text{II.21})$$

Agora separamos as variáveis e integramos ambos os lados da equação para obter

$$m \int_{v_0}^{v(x)} v' dv' = \int_{x_0}^x F(x') dx'. \quad (\text{II.22})$$

A integral de v' é $v'^2/2$, então o lado esquerdo da equação envolve $v(x)$ ao quadrado. Tomando a raiz quadrada resultará em v como função de x , isto é, $v(x)$.

Separando variáveis em $dx/dt \equiv v(x)$ resulta em

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{v(x')} = \int_{t_0}^t dt'. \quad (\text{II.23})$$

Supondo que conseguimos resolver a integral do lado esquerdo da equação acima, ela nos dá t como função de x . Podemos então (em princípio) inverter esse resultado para obter x em função de t , isto é, $x(t)$. O grande problema neste caso é que a integral da Eq. II.23 nem sempre pode ser resolvida. E mesmo se puder, pode não ser possível inverter $t(x)$ para obter $x(t)$.

- F é apenas função de v : $F = F(v)$.

Neste caso, basta escrever a equação $F = ma$ como

$$m \frac{dv}{dt} = F(v), \quad (\text{II.24})$$

fazer a separação de variáveis e integrar ambos os lados para obter

$$m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv'}{F(v')} = \int_{t_0}^t dt'. \quad (\text{II.25})$$

Supondo que esta integral possa ser feita, ela resulta em t como função de v , e portanto (em princípio), v como função de t , isto é, $v(t)$. Podemos então integrar $dx/dt \equiv v(t)$ para obter $x(t)$ da equação

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^t v(t') dt'. \quad (\text{II.26})$$

Observação: Neste caso em que $F = F(v)$, se quisermos encontrar v como função de x , $v(x)$, então deveríamos usar a regra da cadeia para escrever a como $v(dv/dx)$ e integrar

$$m \int_{v_0}^{v(x)} \frac{v' dv'}{F(v')} = \int_{x_0}^x dx'. \quad (\text{II.27})$$

Pode-se então obter $x(t)$ da Eq. II.23.

Ao invés de colocar as condições iniciais nos limites de integração, poderíamos também ter calculado as integrais indefinidas, lembrando de colocar as constantes de integração no resultado. Estas constantes seriam então determinadas utilizando as condições iniciais.

Você *não* deve decorar os procedimentos acima, porque há variações, dependendo do que é dado e do que você deseja resolver. Tudo que você precisa saber é que $\ddot{x}$ pode ser escrito como dv/dt ou vdv/dx . Uma destas formas irá resolver o problema (isto é, deixará apenas duas das três variáveis nas equações diferenciais). Depois disso, basta separar variáveis e integrar quantas vezes forem necessárias.⁶

Exemplo 1 - Força gravitacional

Uma partícula de massa m está sujeita a uma força constante $F = -mg$. A partícula é largada do repouso de uma altura h . Como esta força constante entra em todos os casos anteriores, podemos resolver este problema para encontrar $y(t)$ de duas maneiras:

- Encontrar $y(t)$ escrevendo a como dv/dt .
- Encontrar $y(t)$ escrevendo a como vdv/dy .

Solução:

- $F = ma$ resulta em $dv/dt = -g$. Multiplicando por dt e integrando, obtemos $v = -gt + A$, onde A é a constante de integração.⁷ A condição inicial de que a partícula sai do repouso nos diz que $v(0) = 0$, e portanto, $A = 0$. Assim, $v = dy/dt = -gt$. Multiplicando ambos os lados por dt e integrando, obtemos $y = -gt^2/2 + B$. A condição inicial $y(0) = h$ nos dá $B = h$. Portanto,

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (\text{II.28})$$

⁶Queremos que apenas duas variáveis apareçam nas equações diferenciais porque o objetivo é separar variáveis e integrar; e porque as equações só possuem dois lados. Se as equações fossem triângulos, a história seria outra.

⁷Vamos fazer este exemplo usando integrais indefinidas e colocando as constantes de integração, que são determinadas pelas condições iniciais. Resolveremos o exemplo seguinte colocando as condições iniciais nos limites de integração.

- b. $F = ma$ resulta em $vdv/dy = -g$. Separando as variáveis e integrando, obtemos $v^2/2 = -gy + C$. A condição inicial de que a partícula é largada de $y = h$ a partir do repouso nos diz que $v(h) = 0$, e portanto $C = gh$. Desta forma, $v \equiv dy/dt = -\sqrt{2g(h-y)}$. Escolhemos a raiz negativa pois a partícula está caindo (e portanto, possui velocidade negativa, já que consideramos o sentido para cima como positivo). Separando variáveis obtemos

$$\int \frac{dy}{\sqrt{h-y}} = -\sqrt{2g} \int dt. \quad (\text{II.29})$$

Esta integral resulta em $2\sqrt{h-y} = \sqrt{2g}t$, onde utilizamos a condição inicial $y(0) = h$. Portanto, $y = h - gt^2/2$, como obtido no item (a). Nesta parte (b), essencialmente derivamos a conservação de energia, como veremos no capítulo 4.

Exemplo 2 - Bola em queda

Uma bola é largada do repouso de uma altura h . Suponha que a força de arrasto do ar⁸ seja da forma $F_{res} = -\beta v$. Encontre a velocidade e a altura em função do tempo.

Solução: Escolhendo o sentido para cima como positivo, a força na bola é

$$F = -mg - \beta v. \quad (\text{II.30})$$

Note que v é negativo aqui, porque a bola está caindo, e a força de arrasto aponta para cima, como deveria. Escrevendo $F = mdv/dt$ e separando variáveis, obtemos

$$m \int_0^{v(t)} \frac{dv'}{mg + \beta v'} = - \int_0^t dt'. \quad (\text{II.31})$$

A integração resulta em $\ln(1 + \beta v/(mg)) = -\beta t/m$. Exponenciando ambos os lados, ficamos com

$$v(t) = -\frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}\right). \quad (\text{II.32})$$

⁸A força de arrasto, ou de resistência, é aproximadamente proporcional a v para pequenas velocidades (digamos que por volta de $10m/s$). Para velocidades maiores (maiores que $100m/s$), a força de arrasto é aproximadamente proporcional a v^2 . Estudaremos mais sobre força de arrasto no capítulo 1.

Escrevendo $dy/dt \equiv v(t)$, separando variáveis e integrando para obter $y(t)$, obtemos

$$\int_h^{y(t)} dy' = -\frac{mg}{\beta} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{\beta t'}{m}}\right) dt'. \quad (\text{II.33})$$

Portanto,

$$y(t) = h - \frac{mg}{\beta} \left(t - \frac{m}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}\right) \right). \quad (\text{II.34})$$

OBSERVAÇÕES:

1. Já vimos os casos limites de nossas respostas no capítulo anterior. Antes, não tínhamos nos preocupado com a maneira de obter o resultado e apenas verificamos se ele podia ou não estar correto.
2. Como você pode ver pela Eq. II.32, a velocidade com que a bola cai depende de sua massa m . Além disso, a grandeza β é aproximadamente proporcional a área da seção reta A da bola. Portanto, $v \propto m/A$. Duas bolas de mesmo tamanho, uma feita de chumbo e outra de espuma, possuem a mesma área transversal A , mas possuem massas diferentes. Portanto, elas caem de maneira diferente.